Aufagebenkatalog zum Kurs zu Stoch0 – Winter 2024/2025
Aufgaben zum Thema **Verschiedenes: Schätzer, Tester, Markov-Ketten**
Dr. Anton Malevich

Aufgabe 1 Eine Grundgesamtheit besitze den Mittelwert μ und die Varianz σ^2. Die Stichprobenvariablen $X_1, \ldots, X_5$ seien unabhängige Ziehungen aus dieser Grundgesamtheit. Man betrachtet als Schätzfunktionen für μ die Stichprobenfunktionen

$$\begin{aligned}
T_1 &= \bar{X} = \frac{1}{5}(X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5), \\
T_2 &= \frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3), \\
T_3 &= \frac{1}{8}(X_1 + X_2 + X_3 + X_4) + \frac{1}{2}X_5, \\
T_4 &= X_1 + X_2, \\
T_5 &= X_1.
\end{aligned}$$

a) Welche Schätzfunktionen sind erwartungstreu für μ?

b) Welche Schätzfunktion ist die wirksamste, wenn alle Verteilungen mit existierender Varianz zur Konkurrenz zugelassen werden?

Aufgabe 2 Berechnen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für den Parameter p der geometrischen Verteilung.

Aufgabe 3 Berechnen Sie den Maximum-Likelihood Schätzer für den Parameter λ der Exponentialverteilung.

Aufgabe 4 Der Bundeskanzler stellt mal wieder die Vertrauensfrage. Über die Wahrscheinlichkeit p, dass ein Bundestagsabgeordneter dem Kanzler das Vertrauen ausspricht gibt es unterschiedliche Aussagen. In Kreisen der Opposition geht man von $p = 0{,}3$ aus, die meisten Regierungsmitglieder gehen von $p = 0{,}6$ aus und in den Medien ist von $p = 0{,}5$ die Rede. Um sicher zu gehen, führt der Bundeskanzler eine Zufallsstichprobe vom Umfang $n = 5$ (mit Zurücklegen) unter den 601 Bundestagsabgeordneten durch. Von den 5 befragten Abgeordneten würden ihm die ersten drei das Vertrauen aussprechen, die anderen beiden nicht.

a) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood Schätzer für p.

b) Würde sich der in a) berechnete Maximum-Likelihood Schätzer ändern, wenn anstelle der ersten drei Abgeordneten der erste, dritte und fünfte befragte Abgeordnete das Vertrauen aussprechen würde (und die anderen beiden nicht). Begründung!

c) Gehen Sie jetzt davon aus, dass 301 der 601 Abgeordneten das Vertrauen aussprechen. Im Vorfeld werden ohne Zurücklegen fünf Abgeordnete befragt. Bestimmen Sie (eventuell durch geeignete Approximation) die Wahrscheinlichkeit, dass genau drei Abgeordnete das Vertrauen aussprechen.

Aufgabe 5 Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit Werten in $(0, \infty)$ und Dichte

$$f_\theta(x) = \frac{\theta^m}{\Gamma(m)} x^{m-1} e^{-\theta x} \mathbb{1}_{x>0}$$

für ein $m \in \mathbb{N}$, mit $m \geq 2$, und mit einem unbekannten Parameter $\theta > 0$.
Dabei ist $\Gamma(m) > 0$ eine Normierungskonstante, die unabhängig von θ ist.

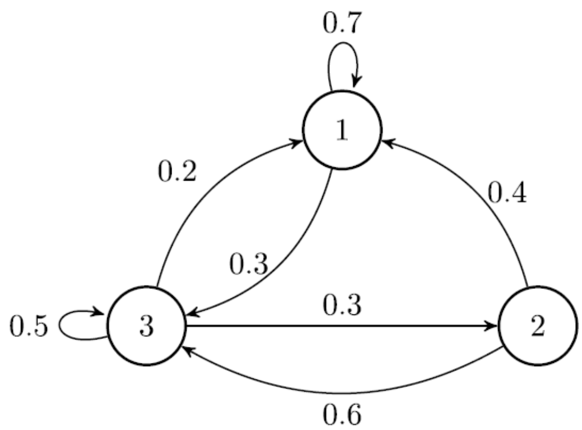
a) Sei $m = 2$. Zeigen Sie, dass
$$\hat{f}_\theta(x) = \theta^2 x e^{-\theta x} \mathbb{1}_{x>0}$$
eine Wahrscheinlichkeitsdichte definiert (d.h. $\Gamma(2) = 1$).

b) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für θ.

Aufgabe 6 Eine Verbraucherzentrale möchte überprüfen, ob ein bestimmtes Milchprodukt Übelkeit bei den Konsumenten auslöst. In einer Studie mit zehn Personen wird bei sieben Personen nach dem Genuß dieses Milchprodukts eine auftretende Übelkeit registriert. Überprüfen Sie zum Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}05$ die statistische Nullhypothese, dass der Anteil der Personen mit Übelkeitssymptomen nach dem Genuß dieses Produkts in der Grundgesamtheit höchstens 60% beträgt. Geben Sie zunächst das zugehörige statistische Testproblem an.

Aufgabe 7 Überprüfen Sie, dass
$$P = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0 & 0{,}7 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0 & 0 & 0{,}6 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0 & 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1 \end{pmatrix}$$
eine stochastische Matrix ist, und zeichnen Sie den Übergangsgraphen. Berechnen Sie die invarianten Verteilungen.

Aufgabe 8 Sei der Übergangsgraph einer Markov-Kette gegeben.



a) Bestimmen Sie die zugehörige stochastische Matrix P,

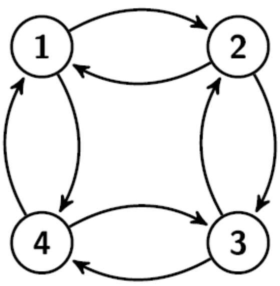
b) Berechnen Sie die bedingte Verteilung von X_3, gegeben $X_0 = 1$.

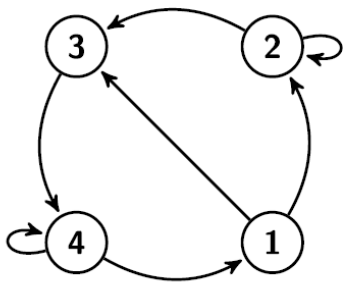
c) Ist die Kette irreduzibel bzw. aperiodisch?

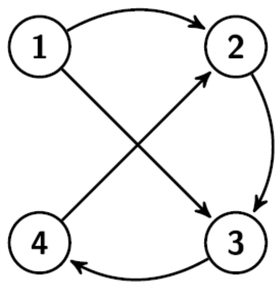
d) Berechnen Sie die invarianten Verteilungen.

e) Bestimmen Sie $\lim_{n\to\infty} E[X_n]$.

Aufgabe 9 Welche der Markov-Ketten zu den folgenden Übergangsgraphen sind irreduzibel bzw. aperiodisch? Pfeile stehen dabei für positive Übergangswahrscheinlichkeiten.







Aufgabe 10 Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markov-Kette mit Zustandsraum $\{1,2,3\}$ und Übergangswahrscheinlichkeiten

$$p_{1,2} = p_{1,3} = \frac{1}{2}, \quad p_{2,1} = \frac{1}{2}, \quad p_{2,2} = \frac{1}{4}, \quad p_{2,3} = \frac{1}{4}, \quad p_{3,3} = 1.$$

a) Ist die Markov-Kette irreduzibel?

b) Bestimmen Sie alle möglicherweise vorhandenen invarianten Verteilungen dieser Kette.

c) Bestimmen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} P(X_n = i|X_0 = 1)$ für $i \in \{1,2,3\}$.

Aufgabe 11 Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markov-Kette mit Zustandsraum $\{1,2,3\}$ und Übergangswahrscheinlichkeiten

$$p_{1,2} = p_{1,3} = \frac{1}{2}, \quad p_{2,2} = p_{3,3} = 1.$$

a) Ist die Markov-Kette irreduzibel?

b) Bestimmen Sie alle möglicherweise vorhandenen invarianten Verteilungen dieser Kette.

c) Bestimmen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} P_\nu(X_n = i|X_0 = 1)$ für $i \in \{1,2,3\}$, wenn die Startverteilung gegeben ist durch $\nu = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right]^T$.

Aufgabe 12 Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markov-Kette mit Zustandsraum $\{1,2,3\}$ und Übergangswahrscheinlichkeiten

$$p_{1,2} = p_{1,3} = \frac{1}{2}, \quad p_{2,2} = p_{2,3} = p_{3,2} = p_{3,3} = \frac{1}{2}.$$

Zeigen Sie: Die Markov-Kette ist nicht irreduzibel, besitzt aber eine eindeutige invariante Verteilung.

Aufgabe 13 Ein schusseliger Wohnungsbesitzer steht an seiner Haustür mit vier gleich aussehenden Schlüsseln. Er probiert einen Schlüssel und wechselt dann. Die Reihenfolge, in der die Schlüssel ausprobiert werden, kann durch eine Markovkette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit Zustandsraum $S := \{1,2,3,4\}$ beschrieben werden, die die folgende Übergangsmatrix $P = (p_{ij})_{i,j\in S}$ hat:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}6 & 0 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & 0 & 0{,}6 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0 & 0{,}6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

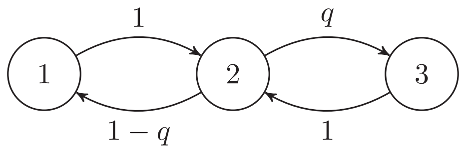
Der vierte Schlüssel ist also der Richtige und öffnet die Tür.

a) Geben Sie den zu dieser Markovkette gehörigen Graphen an.

b) Wie viele invariante Verteilungen gibt es? Begründen Sie Ihre Antwort und bestimmen Sie diese invarianten Verteilungen.

c) Der Wohnungsbesitzer probiert als erstes Schlüssel Nummer 2 aus. Wie wahrscheinlich ist es, dass höchstens zwei weitere Versuche ausreichen, um die Tür zu öffnen?

Aufgabe 14

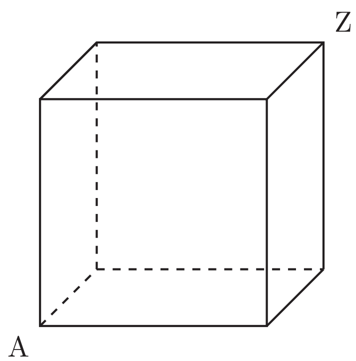


a) Geben Sie die Übergangsmatrix $P = (P_{ij})$ an.

b) Geben Sie in Abhängigkeit von $q \in [0, 1]$ die invarianten Verteilungen $\pi = (\pi_i)$ an.

c) Berechnen Sie den Erwartungswert $E[T_3|X_0 = 3]$ in Abhängigkeit von q, wobei T_3 die Rückkehrzeit zum Zustand 3 ist.

Aufgabe 15



Eine Spinne sitzt in der Ecke A des abgebildeten Würfels. Sie wählt gleichverteilt eine der drei möglichen Richtungen aus und wandert zu dieser Ecke. Dort entscheidet sie sich wieder gleichverteilt für eine der drei möglichen Richtungen. Die Spinne läuft so lange, bis sie die Ecke Z erreicht hat.

a) Geben Sie die Übergangsmatrix zu dieser Markovkette an.

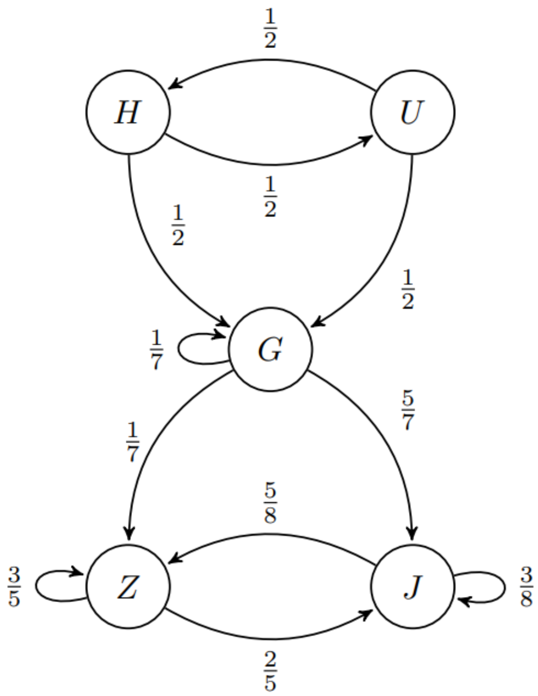
b) Die Spinne braucht für den Weg von einer Ecke zur Nächsten 1 Minute. Bestimmen Sie die erwartete Zeit bis die Spinne die Ecke Z erreicht hat.

c) Angenommen die Spinne verhält sich nun in Z wie in allen anderen Ecken und wählt gleichverteilt eine der möglichen Richtungen aus und geht dann zu der entsprechenden Ecke.

   (i) Geben Sie die Übergangsmatrix an.

   (ii) Bestimmen Sie alle invarianten Verteilungen für diese Markovkette.

Aufgabe 16 Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markovkette mit Zustandsraum $S = \{G, H, J, U, Z\}$, deren Dynamik durch den folgenden Übergangsgraphen gegeben ist:



Sei $T_{\{J,Z\}} := \min\{n \in \mathbb{N}_0 : X_n \in \{J, Z\}\}$ und

$$f : S \to \mathbb{R}, \quad f(x) = P_x(X_{T_{\{J,Z\}}} = Z).$$

a) Geben Sie $f(J)$ und $f(Z)$ an und berechnen Sie daraus $f(G)$.

b) Angenommen die Markovkette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ startet im Zustand U, mit welcher Wahrscheinlichkeit erreicht sie Zustand Z bevor sie Zustand J erreicht?

Aufgabe 17 Wir modellieren hier ein einfaches Warteschlangenmodell mittels einer Markov-Kette, auf folgende Weise: Betrachte Zeitabschnitte von fester Länge. Gegeben seien Parameter $k \in \mathbb{N}$, $\mu \in [0, 1]$ und $\lambda \in [0, 1]$ mit $\lambda + \mu \leq 1$. Modellannahme: In jedem Zeitabschnitt geschieht eines der folgenden Ereignisse:

- Falls weniger als k Kunden da sind, so kommt mit Wahrscheinlichkeit λ ein neuer Kunde an.
- Falls mindestens ein Kunde da ist, so verlässt mit Wahrscheinlichkeit μ ein Kunde die Schlange.
- Andernfalls (mit Wahrscheinlichkeit $1 - \mu - \lambda$ geschieht nichts.

Sei X_n := Anzahl Kunden in der Schlange im n-ten Zeitabschnitt. Dann ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_o}$ eine Markov-Kette mit Zustandsraum $S = \{0, 1, \ldots, k\}$. Diese Markov-Kette kann folgende Übergänge ausführen:

$$p_{i,i+1} = \lambda \text{ falls } i < k, \quad p_{i,i-1} = \mu \text{ falls } i > 0,$$

d. h., die zugehörige Übergangsmatrix ist gegeben durch

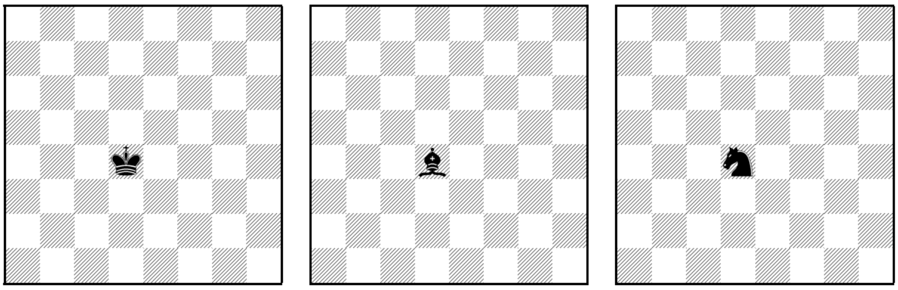
$$P = \begin{pmatrix} 1-\lambda & \lambda & 0 & \cdots & & 0 \\ \mu & 1-\mu-\lambda & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu & 1-\mu-\lambda & \lambda & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \mu & 1-\mu-\lambda & \lambda \\ 0 & \cdots & & 0 & \mu & 1-\mu \end{pmatrix}$$

a) Beweisen Sie: Die invariante Verteilung der beschriebenen Warteschlange ist gegeben durch

$$\pi_i = \frac{1}{\sum_{j=0}^{k} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i, \text{ für } i = 0, 1, \ldots, k.$$

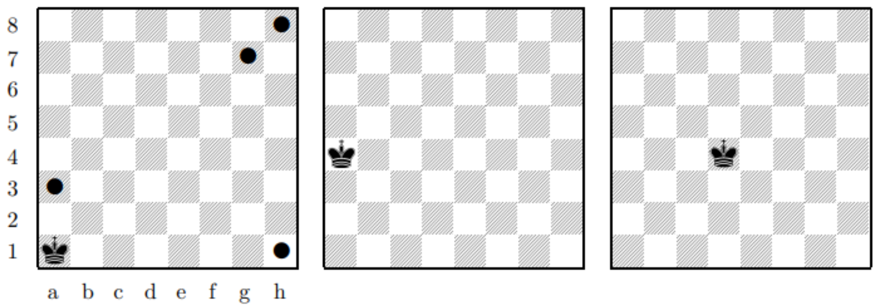
b) Betrachten Sie nun im Fall $\lambda < \mu$ die Situation für $k \to \infty$. Wie viele Kunden befinden sich auf lange Sicht im Mittel in der Warteschlange?

Aufgabe 18 Die Bewegung einer einzelnen Schachfigur auf einem Schachbrett kann als Markovkette mit Zustandsraum $S = \{s_1, \ldots, s_{64}\}$ und Übergangsmatrix P modelliert werden. Dabei bezeichnet X_n die Position der Figur zum Zeitpunkt n, und in jedem Schritt wird aus allen möglichen Zügen gleichwahrscheinlich einer ausgewählt.



Bestimmen Sie, ob die Markovkette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ irreduzibel bzw. aperiodisch ist, wenn es sich bei der Figur um einen a) König, b) Läufer, c) Springer handelt.

Aufgabe 19 Wie in Aufgabe 18a) modellieren wir die Bewegung eines einzelnen Königs auf einem Schachbrett als eine Markovkette. Dabei sei der Zustandsraum $S = \{s_1, \ldots, s_{64}\}$ die Menge der Felder, X_n die Position der Figur zum Zeitpunkt n und die Übergangsmatrix P dadurch gegeben, dass der König in jedem Schritt seinen nächsten Zug rein zufällig wählt. Ausgehend von einem Feld s_i wählt der König also gleichwahrscheinlich eines der N_i Nachbarfelder aus (man unterscheide die Fälle Eckfeld/Randfeld/mittleres Feld).



a) Zeigen Sie, dass

$$\pi := (\pi_1, \ldots, \pi_{64}) \text{ mit } \pi_i := \frac{N_i}{Z} \text{ und } Z := \sum_{i=1}^{64} N_i$$

eine invariante Verteilung von P ist und berechnen Sie Z.

b) Der König starte im Feld $a1$. Berechnen Sie die erwartete Anzahl der Besuche im Feld (i) $h1$, (ii) $h8$, (iii) $g7$, (iv) $a3$

vor der Rückkehr nach $a1$.